Explicaciones de profesores universitarios de matemática sobre las posibles causas de algunos errores de sus estudiantes

Spiegazioni dei professori universitari di matematica sulle possibili cause di alcuni errori dei loro studenti

Henry Alexander Ramírez Bernal
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
MESCUD (Matemáticas Escolares Universidad Distrital), Bogotá, Colombia
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Bologna, Italia

Abstract. *This article reports some preliminary results obtained in the doctoral research developed by the author, and whose main purpose is to determine how the conceptions of a group of professors in mathematics (who teach in early semesters of undergraduate studies) change when they reflect and discuss possible causes of errors made by students in mathematics. Teachers taking part in the research have the opportunity to reflect individually (through an initial inquiry instrument) and discuss with peers (through focus group meetings) about the nature of these errors and the theoretical references in mathematics education that propose explanations for those errors and its possible causes. The explanations of some teachers (participants during the first phase of the study conducted between 2018 and 2019) who answered the initial inquiry questionnaire are described and discussed. Teachers' responses are contrasted with appropriate theoretical references.*

Keywords: obstacle, misconception, didactic contract, conversion, treatment, Duval's cognitive paradox, change of conceptions.

Sunto. *Questo articolo riporta alcuni risultati preliminari ottenuti nella ricerca di dottorato sviluppata dall'autore e il cui scopo principale è determinare come le concezioni di un gruppo di professori (che insegnano nei primi semestri dei corsi universitari) relative alla matematica cambiano quando essi riflettono e discutono sulle possibili cause di errori commessi dagli studenti in matematica. Gli insegnanti che hanno preso parte alla ricerca hanno avuto l'opportunità di riflettere individualmente (attraverso un opportuno strumento di indagine iniziale) e di discutere con i colleghi (attraverso focus group) sulla natura di questi errori e sui riferimenti teorici della didattica della matematica che propongono spiegazioni di tali errori e sulle loro possibili cause. In questo articolo vengono analizzate le dichiarazioni di alcuni professori (che hanno partecipato alla prima fase della ricerca condotta tra il 2018 e il 2019) che hanno risposto al questionario di indagine iniziale. Le risposte dei professori sono analizzate attraverso riferimenti teorici appropriati.*

Parole chiave: ostacolo, misconcezione, contratto didattico, conversione, trattamento, paradosso cognitivo di Duval, cambio di concezioni.

Resumen. *En el presente artículo se reportan algunos resultados preliminares obtenidos en la investigación doctoral desarrollada por el autor y que tiene como propósito fundamental determinar cómo cambian las concepciones de un grupo de profesores de matemática (quienes enseñan en primeros semestres de universidad) cuando reflexionan y dialogan sobre las posibles causas de los errores cometidos por sus estudiantes en matemática. Los profesores participantes tienen la oportunidad de reflexionar individualmente (mediante un instrumento de indagación inicial) y discutir con pares (mediante reuniones de focus group) sobre la naturaleza de esos errores y sobre los referentes teóricos en didáctica de la matemática que proponen explicaciones para esos errores y sus posibles causas. Se describen y discuten las explicaciones de algunos profesores (participantes durante la primera fase del estudio realizada entre 2018 y 2019) quienes respondieron un cuestionario de indagación inicial. Se contrastan las respuestas de los profesores con referentes teóricos apropiados.*

Palabras clave: obstáculo, misconcepción, contrato didáctico, conversión, tratamiento, paradoja cognitiva de Duval, cambio de concepciones.

1. Premisa

En la investigación doctoral se pretende estudiar los posibles cambios en las concepciones de un grupo de profesores de matemática de primeros semestres de universidad (con diferentes tipos de formación profesional y experiencia docente) sobre las causas de los errores de sus estudiantes en matemática. La investigación de corte cualitativo considera tres fases para la recolección de la información: fase de invitación a participar e indagación inicial, fase de discusión y reflexión y fase de entrevistas individuales. En la fase de indagación los profesores respondieron un cuestionario escrito que buscó caracterizar las concepciones de los profesores al inicio de su participación en el estudio. Diversas investigaciones en didáctica de la matemática han presentado tipologías sobre los errores en matemática y algunos estudios, como el de Ramírez (2013), han intentado profundizar en las concepciones de los profesores sobre los errores en matemática de sus estudiantes.[1] El análisis

[1] Entre las investigaciones y estudios sobre el tema se pueden mencionar: una clasificación y caracterización de los errores de aprendizaje de la matemática (Rico, 1995), los obstáculos epistemológicos asociados al aprendizaje matemático (Brousseau, 1976), aspectos didácticos que influyen en el proceso de su aprendizaje como la trasposición didáctica (Chevallard, 1985) o el contrato didáctico (Brousseau, 1976), estudios sobre el pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991), la paradoja cognitiva de Duval en relación a las dificultades de naturaleza semiótica (Duval, 1993), convicciones de profesores y estudiantes sobre área y perímetro (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007), estudios centrados en dificultades de aprendizaje de objetos matemáticos específicos como en el caso de la derivada (Sánchez-Matamoros, García,

de los resultados obtenidos en la primera fase del estudio permite contrastar las respuestas de los profesores con lo reportado en la literatura pertinente e identificar coincidencias y posibles nuevos hallazgos sobre las creencias y concepciones de los profesores sobre el error a través de las explicaciones de los docentes participantes.

2. Marcos teóricos

2.1. Error en el aprendizaje matemático, obstáculos, dificultad y tipologías de aprendizaje matemático

Los errores matemáticos de los estudiantes visibilizan lo problemático que puede ser para ellos el aprendizaje de la matemática, revelando posibles dificultades y obstáculos en ese proceso. Resulta por tanto oportuno delimitar teóricamente parte de la terminología usual en el estudio de los aspectos problemáticos del aprendizaje de la matemática: error, obstáculo, dificultad, misconcepción, representaciones semióticas y contrato didáctico; estas nociones han sido investigadas, caracterizadas y conceptualizadas en el marco de la didáctica de la matemática.

Aunque puede asociarse la idea de error con un concepto erróneo o con una acción desacertada de un estudiante en la actividad matemática, las investigaciones han mostrado que su naturaleza trasciende esta visión reduccionista y resulta más compleja. Matz (1980, p. 94) ha señalado que los errores son "intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación"; para Ruano, Socas y Palarea (2008, p. 2) los errores en matemática aparecen "principalmente en el trabajo de los alumnos cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben". Estos autores consideran además que el error "puede tener distintas procedencias, pero siempre se considera como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de falta de conocimiento o de un despiste" (2008, p. 2). De acuerdo con D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli (2010) un error es sólo la manifestación de un malestar cognitivo. Brousseau (1983) ha señalado que el error no es necesariamente y solo un resultado de la ignorancia, la incertidumbre y el azar, sino que es el resultado de un conocimiento previo el cual fue exitoso, pero que resulta erróneo o simplemente no es aplicable en otras circunstancias. Adicionalmente Brousseau (2001) afirma que en didáctica de la matemática se considera que los errores son específicos de un conocimiento y/o de una situación matemática, son inherentes al proceso de aprendizaje y al proceso de enseñanza; el maestro debe combinar un nivel de riesgo de error soportable y una probabilidad suficiente de beneficio de él.

& Llinares, 2008) y en general del cálculo (Tall, 1993), el infinito (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011) y el número cero (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2012), entre otros.

D'Amore et al. (2010, p. 48) definen obstáculo como "sinónimo de cualquier cosa que se interpone al aprendizaje esperado en la dirección docente-estudiante cualquiera sea su naturaleza". Para D'Amore et al. (2010, p. 49) los obstáculos "no son solo y exclusivamente falta de conocimiento, a veces son expresiones de conocimientos"; de acuerdo con estos autores, el estudiante utiliza este conocimiento para dar respuesta adecuada en un contexto conocido, encontrado en precedencia; si el estudiante trata de usar este conocimiento fuera del contexto conocido ya encontrado, fracasa, generando respuestas incorrectas. El obstáculo produce contradicciones, pero el estudiante se resiste a tales contradicciones; pareciera que requiere de un conocimiento más general, más profundo, que generalice la situación conocida y resuelta, y que comprenda la nueva en la cual ha fracasado. Es necesario que este punto se haga explícito y que el estudiante sea consciente de esto; aunque una vez superado, de modo esporádico el obstáculo reaparece a lo largo del curso de la ruta cognitiva del estudiante.

La epistemología y el estudio histórico de las ideas matemáticas son fundamentales para comprender la naturaleza de los errores de los estudiantes como lo reconoce Brousseau (1976) quien sustenta fuertemente sus aportes en la noción de obstáculo y caracteriza tres tipos: obstáculo epistemológico, obstáculo didáctico y obstáculo ontogenético. Para este autor los *obstáculos epistemológicos* son constitutivos del conocimiento en que se apuntan y se pueden encontrar en la historia de los conceptos mismos. De acuerdo con Artigue (1990, p. 8) los *obstáculos ontogenéticos* "están unidos a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los estudiantes comprometidos dentro del proceso de enseñanza"; los *obstáculos didácticos* de acuerdo con Brousseau (1976, p. 10) "son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo".

Existe amplia y diversa investigación sobre los obstáculos en el aprendizaje matemático; se mencionan aquí sólo algunos de los múltiples resultados de estos estudios: El Bouazzoni (1988) estudió la existencia de obstáculos en la comprensión de las funciones continuas, Luis, Moreno y Waldegg (1991) investigaron sobre los usos potenciales y actuales del término infinito; Tirosh y Tsamir (1996), Tsamir y Tirosh (1992, 1999) reportan sus resultados de investigación sobre las dificultades de los estudiantes para comprender el infinito y específicamente el infinito actual. D'Amore y Fandiño Pinilla (2012) describen los obstáculos epistemológicos presentes en la comprensión de los números naturales y en particular del número cero. Godino, Batanero y Font (2003) señalan que:

> El término *dificultad* indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja. (Godino, Batanero, & Font, 2003, p. 73)

La dificultad en matemática puede asumir por lo menos tres sentidos distintos como lo indican D'Amore et al. (2010): la dificultad en matemática del estudiante, la dificultad específica de algunos argumentos de la matemática y la dificultad del docente en la gestión de una situación matemática. Fandiño Pinilla (2010) propone cinco tipologías de aprendizaje diferentes, no libres de superposiciones que contribuyen a analizar diversos componentes del aprendizaje matemático: conceptual o noético, algorítmico, estratégico, comunicativo y aprendizaje y gestión de las representaciones semióticas.

2.2. *Misconcepciones, representaciones semióticas y contrato didáctico*

En el proceso de aprendizaje matemático se pueden generar en los estudiantes conceptualizaciones erróneas que de perdurar pueden obstaculizar su comprensión matemática, dando lugar a *misconcepciones*. De acuerdo con D'Amore y Sbaragli (2005) el término misconcepción ha sido usado por décadas en la investigación en educación matemática e interpretado con connotaciones negativas como juicio erróneo, idea equivocada, equívoco o malentendido y también en un sentido más extenso como concepción falaz.[2] Silver (1985) vincula fuertemente las misconcepciones con las creencias erróneas; para Schoenfeld (1985) los estudiantes pueden desarrollar algunas concepciones incorrectas, particularmente en relación con los procedimientos. D'Amore (1999, como se cita en D'Amore et al., 2010, p. 78) propone un sentido constructivo para definir el término misconcepción señalando que es un concepto erróneo, el cual constituye un acontecimiento que debe evitarse; para D'Amore no debe verse como una situación del todo negativa: para lograr la construcción de un concepto puede ser necesario pasar a través de una misconcepción momentánea. Algunas misconcepciones se derivan directamente de la trasposición didáctica del saber y son denominadas por Sbaragli (2005) *evitables* pues son consecuencia de las elecciones del profesor; las misconcepciones *inevitables* de acuerdo con Sbaragli (2005) se deben a la inevitabilidad del paso por las representaciones semióticas de los objetos matemáticos.

Las representaciones semióticas de los objetos matemáticos contribuyen fuertemente al estudiar los errores en matemática de los estudiantes. D'Amore (2004) afirma que las representaciones son necesarias en la construcción de los conceptos matemáticos pues no se dispone de objetos concretos, reales que

---

[2] En este artículo se emplea la palabra *misconcepción* del idioma español como equivalente al término ingles *misconception* y a la palabra italiana *misconcezione*; D'Amore y Sbaragli (2005, p. 140) señalan textualmente sobre la palabra inglesa misconception: "La parola inglese *misconception* è interpretata solitamente come giudizio erroneo, idea sbagliata, ma anche equivoco o malinteso; si trova intesa anche nel senso più esteso di concezione fallace". ["La palabra inglesa *misconception* es interpretada generalmente como juicio erróneo, idea equivocada, pero también ambigua o incomprendida; también se entiende en el sentido más amplio de concepción falaz"].

puedan exhibirse en su lugar. D'Amore, Fandiño y Iori (2013, p. 124) justifican lo anterior porque los objetos matemáticos no "son cosas corpóreas (por ejemplo, no son percibidas por los sentidos: nadie los puede ver, tocar, saborear, oír, sentir, pesar, colorear, romper). No existen en la realidad, cosas que se llamen puntos matemáticos, números, figuras, rectas, igualdad; ningún objeto matemático es una cosa real". D'Amore, Fandiño Pinilla, y Iori (2013, p. 124) señalan además que "la conceptualización cognitiva matemática no es y no puede ser basada sobre significados que se apoyan en la realidad concreta dado que, en matemática no son posibles reenvíos ostensivos". El hecho de recurrir en la actividad matemática a las representaciones semióticas de los objetos matemáticos implica fuertes dificultades en el aprendizaje,[3] como se sintetiza en la paradoja cognitiva de Duval:

> por una parte, la construcción cognitiva de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra parte, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. (Duval, 1993, como se cita en D'Amore et al., 2013, p. 127)

El análisis semiótico de los errores en el aprendizaje matemático requiere comprender cómo *funcionan* las representaciones semióticas de los objetos matemáticos y sus trasformaciones durante el aprendizaje de los estudiantes. Este tipo de análisis se vale de las nociones de registro de representación semiótica y de las transformaciones al interior y entre registros semióticos (tratamiento y conversión). Para Duval (2006) estas transformaciones están en el corazón de la actividad matemática y su diferenciación constituye el primer requisito metodológico para analizar los problemas de comprensión matemática de los estudiantes. Tanto la conversión (Duval, 2006) como el tratamiento (D'Amore, 2006; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; Santi, 2010; Rojas, 2014) son fuente de fuertes dificultades en el aprendizaje matemático.

La noción de contrato didáctico propuesta por Brousseau constituye uno de los referentes teóricos de mayor trascendencia en didáctica de la matemática por su potencial para explicar las complejas interacciones entre profesor y estudiante en la clase de matemática en relación con el saber matemático que es objeto de aprendizaje y su funcionamiento en el aula. Brousseau (1980; 2007) interesado en el estudio de las causas del fracaso en matemática ubicadas en la relación del estudiante con el saber y con las situaciones didácticas y que no estarían ligadas con sus aptitudes u otras características señala que el contrato didáctico (Brousseau, 1986) está constituido por los hábitos específicos del profesor esperados por el alumno y los comportamientos del alumno esperados por el profesor que ocurren en una situación de enseñanza preparada y realizada por el maestro. De acuerdo con

---

[3] Lo cual es coherente con la tipología de aprendizaje semiótico propuesto por Fandiño Pinilla (2010) como referente teórico para analizar la dificultad.

Alagia, Bressan y Sadovsky (2005, p. 37) el contrato incorpora al análisis de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática “un aspecto esencial: la intención de que el alumno aprenda un saber cultural, intención que tiene el docente y que necesariamente el alumno debe compartir”. Adicionalmente estas autoras señalan algunas características del contrato didáctico:

> Este juego sutil, muchas veces difícil de atrapar, en el que a raíz del trabajo en clase con respecto a cierto objeto matemático se negocian significados, se trasmiten expectativas mutuas, se sugieren o se infieren modos de hacer, se comunican o se interpretan (explícita o implícitamente) normas matemáticas, este juego es el contrato didáctico. (Alagia et al., 2005, pp. 37–38)

El contrato didáctico constituye un referente teórico en didáctica de la matemática que continúa vigente como objeto de investigación como lo muestran algunos estudios recientes. Por ejemplo, D’Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sarrazy (2010) proponen una visión crítica y moderna sobre el contrato didáctico. Por otra parte, Narváez Ortiz (2017) propone un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas.

2.3. Creencias, concepciones y convicciones sobre las causas del error en matemática

De acuerdo con Pajares (1992) las creencias constituyen verdades personales indiscutibles que se derivan de la experiencia o de la fantasía del individuo y tienen un fuerte componente evaluativo y afectivo. Moreno y Azcárate (2003, p. 67) señalan que “no se fundamentan en la racionalidad sino sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo”. Para Schoenfeld (1992, como se cita en Pehkonen y Törner, 1999) las creencias son comprensiones y sentimientos que dan forma a la manera en que un individuo conceptualiza y se involucra con el conocimiento matemático. De acuerdo con Pehkonen y Pietilä (2003) las creencias pueden considerarse desde diferentes enfoques dependiendo de su relación con el conocimiento, las actitudes, las creencias o la metacognición del individuo; así, Pajares (1992) y Furinghetti (1996) consideran las creencias como parte del conocimiento, Grigutsch (1998) las ubica como parte de las actitudes y para Thompson (1992) son parte de las concepciones. Schoenfeld (1987) considera las creencias como parte de la metacognición del individuo. En el caso específico de los profesores García, Azcárate, y Moreno (2006) identifican algunas características de las creencias del profesor: se asocian a ideas personales e influyen en su toma de decisiones, influyen en el proceso enseñanza aprendizaje, tienen un valor afectivo, son un tipo de conocimiento y se justifican sin rigor alguno.

Algunos autores señalan que, en contraste con las creencias, las concepciones poseen un mayor nivel de racionalidad, elaboración cognitiva y de consciencia. Por ejemplo, Pehkonen y Pietilä (2003) subrayan el componente cognitivo de las concepciones mientras que en las creencias subconscientes se enfatiza el componente afectivo. García, Azcárate y Moreno (2006, p. 87) consideran que las concepciones "consisten en la estructura que cada profesor de matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes". Estos autores adicionalmente caracterizan algunas de las concepciones del profesor: forman parte del conocimiento, son producto del entendimiento, actúan como filtros en la toma de decisiones e influyen en los procesos de razonamiento. D'Amore (2008) define epistemológicamente la concepción como un

> conjunto de convicciones, de conocimientos y de saberes científicos, que tienden a decir cuáles son los conocimientos de los individuos o de los grupos de personas, su funcionamiento, las formas de establecer su validez, de adquirirlas y por tanto de enseñarlas y de aprenderlas. (D'Amore, 2008, p. 88)

Autores como D'Amore y Fandiño (2004) o Campolucci, Maori, Fandiño y Sbaragli (2006) privilegian el uso de la palabra convicción en sus estudios sobre cambios (de convicciones) de los profesores. D'Amore y Fandiño Pinilla (2004, p. 26) asumen la convicción en el sentido de creencia: "*belief* o creencia: opinión, conjunto de juicios y de expectativas, lo que se piensa a propósito de algo". De acuerdo con Martínez Padrón (2013) las creencias:

> Constituyen convicciones personales, en diferentes grados, acerca de algo (objeto o situación) o alguien, son adquiridas y reforzadas a partir de la historia/experiencia de vida de quien las posee y son elementos que implícitamente se tienen presentes al momento de actuar ante el objeto o sujeto que las motivan. (Martínez Padrón, 2013, p. 234)

Pehkonen (2001) señala que las creencias pueden ubicarse en un amplio rango que puede ir desde creencias profundas hasta creencias superficiales; este autor se refiere a este rango como niveles de convicción.

En esta investigación doctoral se ha asumido el sentido de racionalidad y elaboración cognitiva de las concepciones como rasgo diferenciador fundamental frente a la falta de racionalidad que caracteriza a las creencias.

3. Problema de investigación

Autores como Ramírez (2013) y Charnay (1989), Economou (1995) y Milhaud (1980) citados por Gagatsis y Kyriakides (2000) han sugerido que los profesores presentan explicaciones sobre las causas de los errores en matemática de sus estudiantes que se distancian de los referentes teóricos y de investigación apropiados propuestos desde la didáctica de la matemática; estas explicaciones de los profesores están vinculadas con sus creencias y concepciones influyendo en muchos casos negativamente en la forma como los profesores conciben las causas del error en matemática. Lo anterior resulta problemático si el profesor realiza profesionalmente su ejercicio docente y asume la responsabilidad de ayudarle al estudiante a superar sus errores en matemática; precisamente sobre lo anterior Ball, Thames y Phelps (2008) han señalado que la enseñanza implica más que la identificación de respuestas incorrectas, pues una enseñanza competente requiere poder reconocer el origen de un error matemático. Para estos autores, este es un trabajo que debe realizarse rápidamente, sobre la marcha, porque en el salón de clases, los estudiantes no pueden esperar mientras el profesor se pregunta sobre la matemática. En una vía similar se han expresado Borasi (1987) y Brodie (2014) quienes coinciden en llamar la atención sobre el potencial del error como una posible vía para que el profesor pueda acceder al pensamiento de los estudiantes en su forma de hacer matemática. De lo anterior puede afirmarse que es primordial comprender las posibles causas de los errores más que la simple identificación del error en matemática de los estudiantes: la importancia del proceso no consiste en el reconocer *el* error, sino *la causa de tal* error.

Si la forma en que el profesor de matemática aborda durante su ejercicio profesional los errores en el aprendizaje matemático está privilegiadamente influida por creencias y concepciones ingenuas o distantes de las explicaciones teóricas sobre estos errores y sus causas, difícilmente podrá realizar una gestión efectiva en el aula para mejorar la comprensión de sus estudiantes. La posibilidad de que los profesores modifiquen sus concepciones sobre las causas de los errores en el aprendizaje en matemática al tomar consciencia de la necesidad de explicaciones más elaboradas (sustentadas por ejemplo en referentes teóricos propuestos en didáctica de la matemática) y que disten cada vez mas de explicaciones ingenuas podría contribuir favorablemente en su enseñanza de la matemática. Pehkonen (2006) ha señalado que un profesor debe ser consciente de sus acciones y debe reflexionar sobre ellas, pues cuando el individuo reflexiona sobre ellas se produce aprendizaje, de tal forma que la conciencia de las propias creencias y concepciones puede surgir. Las investigaciones han evidenciado que las concepciones de los profesores pueden cambiar y en qué condiciones se producen tales cambios (Pehkonen, 2006). En contraste con la idea que cambios sustantivos en los profesores son concebidos generalmente como procesos graduales, complejos y difíciles (Guskey, 2003, como se cita en Bobis, Way, Anderson, & Martin, 2016), algunos autores como Liljedahl (2010) han notado cambios rápidos y profundos en las creencias y prácticas de los profesores.

4. Pregunta de investigación

En la investigación doctoral se busca profundizar en la comprensión, descripción y caracterización de los posibles cambios en las concepciones de un grupo de profesores (en ejercicio) de matemática de primeros semestres de universidad sobre las causas de los errores de sus estudiantes. Se propone una intervención en la que se promueve la reflexión crítica, el debate y la discusión por parte de los profesores participantes. La intervención es realizada por el investigador quien presenta a los profesores la teoría de obstáculos y la teoría de representaciones semióticas como referentes teóricos y de investigación que ayudan a explicar las posibles causas de algunos errores provenientes de diversas fuentes (como su propia práctica y de la literatura especializada). La investigación consiste en tres fases: invitación a participar e indagación inicial con la que se busca caracterizar las creencias y concepciones de los profesores sobre al iniciar el estudio, una segunda fase de reflexión crítica que se desarrolla mediante discusiones orientadas en grupos focales (focus group) y finalmente una fase de entrevistas personales con el investigador en los casos que se desea profundizar en algunos de los aspectos tratados en las fases anteriores. La información obtenida debe permitir realizar un análisis de corte cualitativo descriptivo para responder la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué cambios en las concepciones de los profesores sobre las causas de los errores en el aprendizaje de la matemática se producen a partir de una reflexión crítica (sustentada en la teoría de obstáculos y teoría de las representaciones semióticas de Duval) sobre el análisis de los errores de sus estudiantes?

5. Algunos resultados preliminares obtenidos de la indagación inicial

5.1. Recolección de información: indagación inicial

Inicialmente se envió (por correo electrónico) o se entregó personalmente (en físico) una carta de invitación (individual) a participar en el proceso de investigación a un grupo de profesores de matemática de primeros semestres de universidad, que se encuentran en ejercicio y que están vinculadas con alguna institución de educación superior en la ciudad de Bogotá y municipios aledaños (Chía y Soacha). Los profesores invitados a participar por su trayectoria profesional y experiencia pueden brindar información específica y pertinente para el desarrollo de la investigación. En la carta entregada a los profesores se describen: los propósitos de la investigación, las actividades que se desarrollarán, el rol de los profesores y del investigador y la disponibilidad requerida (tanto de tiempo como de desplazamiento). Adicionalmente se les solicitó a los profesores que identificaran algunos errores en matemática de sus estudiantes y propusieran posibles explicaciones para sus causas, mediante un siguiente cuestionario específico previamente diseñado.

La información recogida en la fase indagatoria permitió caracterizar algunas de las creencias y concepciones iniciales de los profesores sobre las causas del error en matemática de sus estudiantes, acceder a un primer soporte/evidencia de información y obtener información utilizable en el desarrollo de las sesiones posteriores, como insumo para el análisis y discusiones de los profesores.

5.2. Resultados obtenidos y análisis preliminar

Las respuestas de los participantes permitieron evidenciar fuerte coincidencia entre los profesores participantes en los cursos que han orientado: cálculo diferencial, cálculo integral, álgebra lineal y matemática básica o precálculo hacen parte en general de la base experiencial de todos los docentes que respondieron el cuestionario de inicial. Estos cursos usualmente se ubican en los primeros semestres de los diferentes programas académicos. Así mismo hay una gran coincidencia en su ejercicio profesional como profesores de programas de ingeniería y ciencias económicas y administrativas.

Por otra parte, los errores de los estudiantes descritos por los docentes coinciden en muchos casos con lo reportado en la investigación sobre errores y específicamente en las tipologías sobre el tema.[4] Los profesores participantes identificaron errores algebraicos, errores aritméticos, errores de tipo geométrico, errores vinculados a objetos matemáticos del cálculo (funciones, límites, derivadas) y otros relacionados con su forma de argumentar entre otros. Estos errores reportados se refieren a problemas en las operaciones con fracciones, simplificaciones incorrectas, resolución de ecuaciones, uso de reglas inadecuadas en procesos algorítmicos (por ejemplo, para el cálculo de derivadas), problemas con el uso de la letra en matemática y su interpretación, resolución de problemas de geometría entre otros. En cuanto a las explicaciones de los profesores sobre las causas posibles de los errores se obtuvieron respuestas que van desde justificaciones que se distancian por completo de los referentes teóricos hasta respuestas que incluyen un análisis detallado de cada error con intentos de argumentar sólidamente algunas de las posibles causas. Sin embargo, no se incluyen en las respuestas de los profesores referencias concretas y/o explícitas a los referentes teóricos de la didáctica de la matemática presentados en los apartados anteriores salvo algunas excepciones particulares. Por razones de espacio, sólo se muestran en el presente artículo algunas de los resultados obtenidos en esta indagación inicial.

5.3. Algunas explicaciones de los profesores a las causas del error en matemática de sus estudiantes

Considérese el caso de un binomio elevado al cuadrado y desarrollado incorrectamente como se muestra a continuación:

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}$$

---

[4] Aquí no se pretende mostrar una tipología de errores. El interés del autor se enfoca en mostrar la forma como los profesores explican algunos de los errores de sus estudiantes como parte del análisis de la tesis doctoral. Para profundizar sobre tipologías de errores se recomienda consultar Rico (1995).

Algunos profesores incluyeron este ejemplo en sus respuestas al cuestionario inicial que puede ser considerado uno de los casos típicos de errores en el álgebra de estudiantes universitarios. Entre los argumentos de los profesores para la posible causa de este error se encuentra el "desconocimiento de los estudiantes" como lo señala Humberto:[5] "no tienen claro las operaciones de los exponentes" o como lo señala el profesor Mario: "no se tiene en cuenta la jerarquía de las operaciones"; el profesor William se expresa en un modo similar: "al elevar el binomio al cuadrado, lo vuelve un binomio de los términos al cuadrado y no el trinomio cuadrado perfecto. Desconocimiento del desarrollo de un binomio al cuadrado". En contraste con la respuesta anterior algunos de los profesores explican el proceder de sus estudiantes mostrando un intento de reflexión sobre su causa como lo evidencia la respuesta del profesor Milton:

> Recuerdan, vagamente, que alguna de las propiedades de la potencia de una multiplicación es el producto de las potencias. Por lo cual, asocian ese esa suma como si fuera un producto. Por otro lado, olvidan que un binomio al cuadrado es un objeto que está multiplicado por él mismo.

En este caso el error puede estar motivado por el uso de un conocimiento que funcionaba en un contexto pero que ya no es apropiado en otro contexto, lo que es la idea base del concepto de obstáculo. El profesor Carlos por su parte parece reconocer (aunque no explícitamente) la responsabilidad de la enseñanza a la que ha estado sometido el estudiante:

> En el desarrollo de los conceptos y algoritmos del álgebra básica, los estudiantes están expuestos a un número considerable de fórmulas, las cuales no son dadas a ellos mediante un proceso de construcción de conocimiento, o de experiencias de aprendizaje significativas que les permita diferenciar los diferentes algoritmos y apropiarse de los objetos matemáticos.

Otros profesores coinciden en señalar la posible influencia de la forma como se realiza la enseñanza y también la responsabilidad de los docentes sobre las causas posibles de los errores de sus estudiantes. Por ejemplo, el profesor Javier llama la atención sobre el deficiente desempeño y aversión de los estudiantes por la trigonometría: "la trigonometría no se maneja, y además tiene aversión per se por parte de ellos, no solo no la comprenden, sino que la entienden como algo feo". Javier intenta explicar esto preguntándose por el sentido en una referencia tácita a la enseñanza: "cadenas infinitas de identidades sin sentido, llegar de un lado a otro a cualquier costo... un año de eso… ¿Y el sentido?, ¿lo canónico de esto?, ¿la utilidad?".

También es mencionada la gestión del profesor en los problemas de los estudiantes en el caso de simplificaciones inadecuadas en fracciones; para ilustrarlo el profesor Ernesto presenta el siguiente ejemplo:

---

[5] En el presente artículo se usan seudónimos para identificar a los profesores participantes.

$$\frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{a}$$

De forma similar el profesor Carlos muestra el siguiente ejemplo en el que se ha simplificado incorrectamente $\boldsymbol{x^2}$:

$$\frac{\boldsymbol{x^2+2x+3}}{\boldsymbol{x^2}}=\frac{\boldsymbol{x^2+2x+3}}{\boldsymbol{x^2}}=\boldsymbol{2x+3}$$

Para el profesor Ernesto este tipo de errores de simplificación dependen de la complejidad de las expresiones y son frecuentes en precálculo y cálculo diferencial. Al explicar las posibles causas señala: "el estudiante procura replicar lo que realizan sus maestros, como regularmente encuentran que los procesos algebraicos necesitan simplificación, procuran reducir las expresiones buscando una respuesta elemental". Entre tanto el profesor Carlos señala que los estudiantes simplifican términos del numerador y el denominador sin considerar las adiciones o sustracciones que se lo impiden. Carlos identifica dos causas posibles de estos errores:

> Esto puede deberse al uso de expresiones por parte del profesor que crean en el estudiante ideas erróneas, por ejemplo, decir que dos términos se simplifican por ser iguales. Además, se evidencia que los estudiantes no logran hacer uso correcto de propiedades y operaciones de los números racionales, pues usualmente se explican algoritmos donde prima el resultado y no el concepto.

El profesor Javier incluye varios ejemplos relativos a las fracciones similares a los anteriores y argumentando sobre sus posibles causas: "obstrucciones didácticas en procesos de formación media, frases como: cancelen arriba y abajo". En las respuestas de los profesores mencionados sobre las simplificaciones incorrectas puede evidenciarse un reconocimiento de posibles obstáculos didácticos, aunque sin mencionar explícitamente esta terminología propia de la didáctica de la matemática.

La suma de numeradores y denominadores para realizar la operación de suma de números racionales es mencionada por varios de los participantes. El profesor Humberto lo ilustra como sigue:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{6}}$$

Humberto explica el error y su causa afirmando que "suman numeradores y denominadores. No tienen claro que los quebrados tienen diferentes denominadores". El profesor Andrés señala que este error se debe a "existencia de confusión entre algoritmos en los números racionales". En un sentido similar se expresa el profesor Milton: "la causa de los errores cometidos en los ejemplos expuestos resulta que los estudiantes aún no han comprendido el concepto de fracción y que, para la suma, es mucho más fácil sumar fracciones homogéneas". Las explicaciones de los profesores en este caso tienden y se reducen a asociar la causa a una "falta de comprensión de las fracciones" pero no profundizan en sus posibles causas. En contraste, es un hecho que las dificultades de los estudiantes al operar con fracciones han sido investigadas profusamente de acuerdo con Fandiño Pinilla (2009). Esta autora señala que "gran parte de la literatura internacional muestra la enorme dificultad conceptual que tienen los estudiantes al realizar las operaciones entre fracciones" (Fandiño Pinilla, 2009, p. 145). En la comprensión de las dificultades de los estudiantes con las fracciones es fundamental el estudio de sus aspectos semióticos asociados; precisamente en relación con la adición de fracciones esta autora señala:

> La investigación de los últimos 30 años logró evidenciar el hecho de que es necesario dar siempre *sentido* a lo que se está haciendo y esto sucede a través del manejo de varios registros semióticos y con la implicación personal del estudiante en la construcción del propio conocimiento. (Fandiño Pinilla, 2009, p. 146)

Las dificultades de los estudiantes en la resolución de ecuaciones aparecen reiteradamente en las respuestas de los profesores. El profesor Carlos afirma que "el estudiante no establece un orden adecuado para despejar variables en ecuaciones" como en el caso que ilustra sus respuestas:

$$\mathbf{2 = \frac{1}{\boldsymbol{x}} + 2}$$

$$\mathbf{2\boldsymbol{x} = 1 + 2}$$

Para Carlos las posibles causas pudrían encontrarse en la gestión del profesor:

> Este error puede estar sujeto a la falta de conexión con contenidos como la jerarquía de operaciones, ya que el profesor al hacer estos procedimientos suele mencionar que los términos pasan de lado a lado de una ecuación, pero asume que el estudiante entiende el orden. Además, el uso de estas expresiones resulta inadecuado, pues los términos no "pasan" o cosas por el estilo, con lo cual el estudiante olvida la naturaleza de las ecuaciones.

También en el caso de ecuaciones, Javier presenta el siguiente ejemplo extraído de su práctica: "al formular la pregunta ¿cómo se resuelve la siguiente ecuación? $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$"; de acuerdo con Javier la tercera parte de sus estudiantes respondieron "por cuadrática profe". Javier describe brevemente la situación de aula en relación con este ejemplo: "Aunque parezca broma, esta fue la respuesta de cerca de 10(/30) jóvenes que tomó aceptación casi unánime en el salón. Y si factorizamos, les dije, respondieron, para qué si con la cuadrática sale de una". Para Javier, la causa de este tipo de error recae nuevamente en el profesor: "limitación de ejemplos en procesos de enseñanza que obstruye el aprendizaje al particularizar demasiado una situación. Explicación de herramientas sin el sentido que lo subyace". Las explicaciones mencionadas sobre las causas de los errores resolviendo ecuaciones revelan un reconocimiento de posibles obstáculos didácticos. Sin embargo, desde el punto de vista didáctico, esta no necesariamente es la única causa posible. Por ejemplo, en el caso de despejar en una ecuación la dificultad puede estar asociada a la trasformación semiótica de tratamiento en el registro semiótico de la escritura de las ecuaciones.

6. Comentarios finales

Este primer ejercicio de indagación realizado en el marco de la investigación doctoral permitió evidenciar que los profesores tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre los errores de sus estudiantes y sus posibles causas llevándolos a realizar una revisión de su propia experiencia profesional en la enseñanza de la matemática universitaria. De la información recolectada y a pesar de la gran heterogeneidad en las explicaciones para las posibles causas del error en matemática de sus estudiantes, en esta primera fase de la investigación se puede afirmar que existen al menos dos tipos de respuestas que muestran las posibles concepciones de los profesores sobre las causas de los errores de los estudiantes. Por una parte, algunas respuestas atribuyen la causa de esos errores a simple desconocimiento e incluso descuido poniendo toda la carga del error en el mismo estudiante. De otra parte, hay una gran coincidencia en algunas respuestas sobre el reconocimiento de la responsabilidad del docente y sus elecciones a la hora de la clase como posibles causas de los errores de sus estudiantes; esto da un indicio de reconocimiento de posibles obstáculos didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática (aunque los profesores no lo mencionan con ese nombre). Este reconocimiento de la responsabilidad del profesor podría considerarse como punto de partida para la reflexión en la siguiente fase de la investigación que consiste en la discusión con pares en focus group con lo que se estudiarán los posibles cambios en las concepciones de los profesores sobre las causas del error en matemática. También estas respuestas muestran argumentaciones que tratan de explicar de forma detallada las posibles causas del error, aunque en algunos casos estas explicaciones no corresponden o corresponden parcialmente con los referentes teóricos apropiados. Esta primera parte de la investigación doctoral coincide con los resultados de la investigación de Ramírez (2013) en el sentido que los profesores, aunque pueden hacer referencias parciales a conceptos de la didáctica de la matemática no lo hacen con la respectiva terminología técnica.

Referencias bibliográficas

Alagia, H., Bressan, A. M., & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des*

Mathématiques, *10*(2–3), 241–286.

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infinitos infinitos: Filosofía y didáctica del infinito matemático.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Bobis, J., Way, J., Anderson, J., & Martin, A. J. (2016). Challenging teacher beliefs about student engagement in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(1), 33–55.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of Mathematics*, *7*(3), 2–8.

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational studies in mathematics, 85*(2), 221–239.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En W. Vanhamme & J. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement de la mathématique: Comptes rendus de la XXVIII*[e] *rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101–117). Louvain-la-Neuve.

Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 41, 177–182.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 164–198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques: Etudes dans le cadre de la théorie des situations didactique. *Petit x*, 57, 5–30.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Campolucci, L., Maori, D., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2006*).* Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matemática e la sua didattica, 20*(3), 353–400.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, *35*, 90–106.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Enseñanza de la matemática. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática), 17*(1), 87–106.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemáticas de la escuela secundaria superior. *Epsilon*, 58, 23–44.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: Convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 39–68.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). *El número cero: Aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, conceptuales y didácticos del número más* *misterioso*. Bogotá: Editorial Magisterio.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* Bogotá: Editorial Magisterio.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica: Alcuni effetti del "contrato"*. Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática: Análisis de situaciones con falta de aprendizaje*. Bogotá: Editorial Magisterio.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semántica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica, 19*(2), 139–163.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*(1), 37–65.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143–168.

El Bouazzoni, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction* (Tesis de Doctorado). Faculté des Sciences de l'Education, Université Laval, Québec.

Fandiño Pinilla, M. I. (2009). *Las fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática: Evaluar e intervenir en forma mirada y específica*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Furinghetti, F. (1996). A theoretical framework for teachers' conceptions. En E. Pehkonen (Ed.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs III: Proceedings of the MAVI-3 Workshop* (pp. 19–25). Helsinki: University of Helsinki, Department of Teacher Education.

Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, *6*(1), 24–58.

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 85–116.

Godino, J. D., Batanero, M., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Grigutsch, S. (1998). On pupils' views of mathematics and self-concept: developments, structures and factors of influence. En E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *The state-of art in mathematics-related belief research. Results of the MAVI activities* pp. 169–197). Helsinki: University of Helsinki, Department of Teacher Education.

Liljedahl, P. (2010). Noticing rapid and profound mathematics teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(5), 411–423.

Luis, E., Moreno, A., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 211–231.

Martínez Padrón, O. J. (2013). Las creencias en la educación matemática. *Educere*, *17*(57), 231–239.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *The Journal of Mathematical Behavior, 3*(1), 93–166.

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemática acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 21*(2), 265–280.

Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 181–189.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of educational research*, *62*(3), 307–332.

Pehkonen, E. (2001). A hidden regulating factor in mathematics classrooms: mathematics-related beliefs. En M. Ahtee, O. Björkqvist, E. Pehkonen, & V. Vatanen (Eds.), *Research on Mathematics and Science Education. From Beliefs to Cognition, from Problem Solving to Understanding* (pp. 11–35). East Lansing, MI: Michigan State University, Institute for Educational Research, University of Jyväskylä.

Pehkonen, E. (2006). What do we know about teacher change in mathematics? En L. Häggblom, L. Burman, & A.-S. Röj-Lindberg (Eds.), *Kunskapens och lärandets villkor. Festskrift tillägnad professor Ole Björkqvist* (pp. 77–87). Vasa: Åbo Akademi, Pedagoiska fakulteten, Specialutgåva.

Pehkonen, E., & Pietilä, A. (2003). On relationships between beliefs and knowledge in mathematics education. En M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1–8). Department of Mathematics, University of Pisa.

Pehkonen, E., & Törner, G. (1999). Introduction to the abstract book for the Oberwolfach meeting on belief research. En E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Proceedings of the Workshop in Oberwolfach: Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 109–117). Duisburg: Gerhard Mercator University.

Ramírez, H. (2013). *Tipología de errores y dificultades de aprendizaje de la matemática de estudiantes de primer curso de matemática: Análisis epistemológico, semiótico y didáctico* (Tesis de Maestría). Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de la matemática. En J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69–108). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamerica.

Rojas, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos* (Tesis de Doctorado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Ruano, R. M., Socas, M. M., & Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, *2*(2), 61–74.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 267–296.

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic* *transformations: A comparison between semiotic perspectives* (Tesis de Doctorado). Università degli Studi di Palermo, Palermo, Italia.

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni “inevitabili” e misconcezioni “evitabili”. *La matematica e la sua didattica*, *19*(1), 57–71.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). What’s all the fuss about metacognition? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 189–215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. En E. A. Silver (Eds.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 247–266). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associate.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1993). Students’ difficulties in calculus. *Proceedings of Working Group 3* on *Students’ Difficulties in Calculus*, *ICME-7 1992* (pp. 13–28). Québec, Canada.

Thompson, A. G. (1992). *Teachers’ beliefs and conceptions: A synthesis of the research*. En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics learning and teaching (pp. 127–146). New York: Macmillan Publishing Company.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (1996). The role of representations in students’ intuitive thinking about infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *27*(1), 33–40.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1992). Students’ awareness of inconsistent ideas about actual infinity. *Proceedings of the XVI PME* (pp. 90–97). Durham, NH.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 213–219.